Injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Théorème : L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.

Lemme : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\gamma_a = x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2 a}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{\gamma}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}.$$

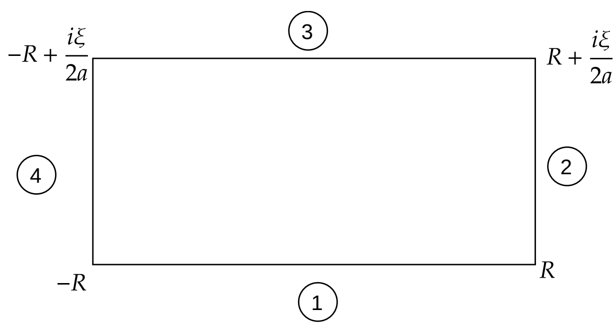
Preuve du lemme : Tout le calcul se base sur ce que je considère être une astuce de calcul. Il faut en effet remarquer que l'on a l'identité suivante :

$$x^2 a + i\xi x = a\left(\left(x + \frac{i\xi x}{2a}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right).$$

On peut alors écrire $\hat{\gamma}_a(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{4a}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x + \frac{i\xi x}{2a}\right)^2} \mathrm{d}x$.

On pose $f : z \in \mathbb{C} \mapsto e^{-az^2}$. Donnons-nous un élément ξ dans $\mathbb{R}$. On va essayer de calculer $\hat{\gamma}(x)$ grâce au théorème des résidus.

Soit $R > 0$ et $\Gamma(R)$ le contour du rectangle de sommets $\{R, R + \dfrac{i\xi}{2a}, -R + \dfrac{i\xi}{2a}, -R\}$:



On a alors $\displaystyle\int_{\Gamma(R)} f(z)\mathrm{d}z = \int_1 f(z)\mathrm{d}z + \ldots + \int_4 f(z)\mathrm{d}z$ où $\displaystyle\int_i f(z)\mathrm{d}z$ désigne l'intégrale sur le chemin numéroté i sur le dessin.

- $\displaystyle\int_1 f(z)\mathrm{d}z \underset{R\to+\infty}{\to} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, c'est le résultat classique de l'intégrale de Gauss.
- $\displaystyle|\int_2 f(z)\mathrm{d}z| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} |e^{-a(R+ix)^2}| = \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} |e^{-a(R^2-x^2)}|\mathrm{d}x$ et le dernier terme tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

- $|\int_4 f(z)\mathrm{d}z|$ tend vers 0 de la même manière que $|\int_2 f(z)\mathrm{d}z|$.
- Comme $|\int_3 f(z)\mathrm{d}z|$ converge absolument il vient que $|\int_3 f(z)\mathrm{d}z| \underset{R\to+\infty}{\to} -\int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+\frac{i\xi x}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x$. Le signe "$-$" vient du fait que notre lacet $\Gamma(R)$ est orienté selon le sens donné par l'ordre précédemment énoncé des sommets.

Comme f est holomorphe le théorème de Cauchy nous dit que pour tout $R > 0$, $\int_{\Gamma(R)} f(z)\mathrm{d}z = 0$. En faisant tendre R vers $+\infty$ il vient alors

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+\frac{i\xi x}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x,$$

d'où le lemme. □

Preuve du théorème : Comme $\mathcal{F}$ est linéaire il est suffisant de montrer que l'unique antécédent de 0 est 0. Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) = 0$. La notation n'est pas très cohérente avec le lemme mais posons tout de même l'application $\gamma_s : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{\frac{-x^2}{2s}}$ ainsi que $g_s(x) = \gamma_s(x)e^{iax}$ où $a \in \mathbb{R}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}_s(u)\mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{\gamma}_s(u-a)\mathrm{d}u \text{ par translation de Fourier}\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{\gamma}_s(u-a)\mathrm{d}u \text{ par parité de } \gamma_s\\ &= (f * \hat{\gamma}_s)(a) = \sqrt{\frac{2\pi}{s}}(f * \hat{\gamma}_s{}^{-1})(a)\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité il faut écrire ce que vaut $\hat{\gamma}_s(a)$ grâce au lemme puis utiliser la bilinéarité de la convolution. En utilisant la formule de dualité (qui est une conséquence rapide mais pas triviale de Fubini-Tonneli) il vient

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}_s(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u)g_s(u)\mathrm{d}u = 0.$$

Ainsi pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f * \gamma_s^{-1} = 0$. Or $(\gamma_s^{-1})_{s\in\mathbb{R}_+^*}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$ donc $||f * \gamma_s^{-1} - g||_1 \underset{s\to+\infty}{\to} 0$ d'où $f = 0$. □

Remarques importantes :

- Il faut savoir démontrer l'intégrale de Gauss (j'aime bien calculer son carré en passant par un changement de coordonnées polaires).
- Montrer que notre famille de γ_s^{-1} est une approximation de l'unité n'est pas triviale, il faut avoir le changement de variable $x = \sqrt{s}$ en tête !!
- Montrer le résultat de convergence L^1 utilisé à la fin doit être un peu connu : ce n'est pas compliqué pour les fonctions continues à support compacts et après c'est une raisonnement pas densité je crois, il faut vérifier ce dernier point.
- La formule de dualité n'est pas extrêment compliquée à montrer, je pense que c'est mieux de connaître la preuve.